Biên soạn: TS: **ĐÀO BÁ DƯƠNG**
Hiệu đính: TS: **BÙI ĐÔNG**

GIÁO TRÌNH
CƠ SỞ HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC
VÀ
ỨNG DỤNG

TỦ SÁCH HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ
HÀ NỘI - 2000

MỞ ĐẦU

Tài liệu về hàm số biến phức, phép tính toán tử, các hàm đặc biệt không phải là ít, nhất là sách được các nước xuất bản bằng tiếng Nga và tiếng Anh. Tuy nhiên những nội dung đó thường được trình bày thành những sách chuyên khảo riêng rẽ, nhiều tài liệu được trình bày rất sâu sắc về lý thuyết, nhưng phần bài tập lại không có hoặc có thì quá ít.

Để đáp ứng yêu cầu học tập của sinh viên và làm tài liệu giảng dạy ở học viện Kỹ thuật Quân sự, chúng tôi biên soạn chuyên đề gồm các nội dung đã được nêu và còn có phần bài tập sau mỗi nội dung hoặc sau mỗi chương.

Nội dung của chuyên đề được trình bày thành 5 chương:

Chương I: *Hàm số biến số phức.*

Chương II: *Tích phân phức và chuỗi hàm.*

Chương III: *Lý thuyết thặng dư và ứng dụng.*

Chương IV: *Phép tính toán tử.*

Chương V: *Các hàm đặc biệt.*

Tùy vào từng chuyên ngành được đào tạo mà chuyên đề được đi sâu vào những nội dung cần thiết nhất, không nhất thiết phải trình bày tất cả các phần đã được trình bày.

Ví dụ: Đối với chuyên ngành công trình quân sự, cần nghiên cứu các phần ánh xạ bảo giác mà giảng ít hơn ở phần toán tử hoặc phần các hàm đặc biệt.

Hay đối với chuyên ngành điện tử thì nên nghiên cứu sâu: phép tính toán tử và các hàm đặc biệt, mà không phải đi sâu phần ánh xạ bảo giác.

Có một số phần dùng cho sinh viên tự nghiên cứu như: Toán tử Mikusinski hay các hàm đặc biệt,...

Tuy nhiên phần bắt buộc phải truyền đạt cho sinh viên là chương I, II và III.

Tác giả hy vọng rằng tài liệu được biên soạn có thể góp phần giúp cho việc dạy và học môn toán chuyên đề này tốt hơn và thuận lợi trong tham khảo.

Chắc chắn, tài liệu không tránh khỏi thiếu sót, tác giả rất mong sự đóng góp của bạn đọc và đồng nghiệp.

Tác giả

MỤC LỤC

Trang

Chương I: Số phức và hàm số biến số phức 5
§1. Số phức và các phép toán về số phức
1.1. Dạng nhị thức của số phức
1.2. Dạng lượng giác của số phức
Bài tập 1 12
§2. Hàm số biến số phức 15
2.1. Khái niệm đường và miền
2.2. Hàm số biến số phức
2.3. Ánh xạ bảo giác
2.4. Các hàm sơ cấp cơ bản
Bài tập 2 33
Chương II: Tích phân hàm số biến số phức 38
§1. Khái niệm chung về tích phân hàm số biến số phức
1.1. Định nghĩa
1.2. Các định lý Côsi
1.3. Công thức tích phân Côsi.
1.4. Các tính chất của hàm giải tích
1.5. Hàm điều hòa
§2. Khai triển hàm giải tích thành chuỗi 47
2.1. Chuỗi Taylo
2.2. Chuỗi Lôlăng
3.3. Phân loại các điểm bất thường
Bài tập 3 52
Chương III. Lý thuyết thặng dư và ứng dụng 59
§1. Lý thuyết thặng dư 59
1.1. Định nghĩa
1.2. Định lý về thặng dư
1.3. Cách tính thặng dư
1.4. Định lý cơ bản của thặng dư
§2. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư 64
2.1. Tính tích phân dạng $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$

2.2. Tính tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$

2.3. Tính tích phân dạng

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha.x \ dx \quad \text{và} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha.x \ dx$$

2.4. Một số loại tích phân khác.

2.5. Tích phân một số hàm đa trị 78

Bài tập 4 83

Chương IV: Phép tính toán tử 83

§1. Phép biến đổi Laplace

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.2. Phép biến đổi ngược Laplace

1.3. Một số ứng dụng của phép biến đổi Laplace 121

§2. Các phép biến đổi tích phân khác

2.1. Phép biến đổi Phuariê

2.2. Phép biến đổi Mêlin 125

Bài tập chương IV 136

§3. Toán tử Mikusinski

3.1. Vành các hàm liên tục

3.2. Trường toán tử

3.3. Các hàm số gián đoạn

3.4. Toán tử tịnh tiến 151

Bài tập phần tham khảo

Chương V: Các hàm đặc biệt 156

§1. Hàm Gama và hàm Bêta

1.1. Tích phân Ơle loại 2

1.2. Tích phân Ơle loại 1

§2. Các đa thức trực giao

2.1. Hệ hàm trực giao

2.2. Các đa thức trực giao

§3. Hàm trụ

3.1. Các hàm trụ loại 1

3.2. Các loại hàm trụ khác

3.3. Nghiệm tổng quát của hàm trụ 180

Tài liệu tham khảo

CHƯƠNG I

SỐ PHỨC VÀ HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ PHỨC

1.1. Dạng nhị thức của số phức:

1.1.1. Định nghĩa: Số phức là biểu thức dạng:

$$z = x + i \,.\, y$$

Trong đó x và y là những số thực, còn i được gọi là đơn vị ảo và $i^2 = -1$. Số x và y được gọi là phần thực và phần ảo của số phức z, và được ký hiệu:

$$x = \mathrm{Re}\,(x + iy),\ y = I_m(x + y)$$

Nếu $y = 0$ thì $z = x$ trùng với số thực, còn nếu $x = 0$ thì $z = i.y$ là phần thuần túy ảo.

Hai số phức $z_1 = x_1 + i\,.\,y_1$ và $z_2 = x_2 + i.y_2$ được gọi là bằng nhau: $x_1 + iy_1 = x_2 + i.y_2$ khi và chỉ thị:

$$x_1 = x_2 \text{ và } y_1 = y_2.$$

Hai số phức z_1, z_2 được gọi là liên hợp với nhau nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = -y_2$, lúc đó người ta ký hiệu số phức liên hợp của $z_1 = x_1 + i.y_1$ là $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$

Hay là: $\overline{x + i.y} = x - i.y$

1.1.2. Các phép tính của số phức:

1. Phép cộng: Tổng hai số phức: $z_1 = x_1 + i.y_1$ và $z_2 = x_2 + i.y_2$ là một số phức z sao cho:

$$z = z_1 + z_1 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

Từ định nghĩa này có thể kiểm tra các tính chất của phép cộng:

a) Phép cộng có tính chất giao hoán

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

b) Phép cộng có tính chất kết hợp:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

2. Phép nhân: Tích của hai số phức z_1 và z_2 là một số phức z sao cho:

$$z = z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Từ định nghĩa có t hể rút ra những tính chất của phép nhân:

a) Phép nhân có tính chất giao hoán:

$$z_1 z_2 = z_2 . z_1$$

b) Phép nhân có tính chất kết hợp.

$$z_1(z_2 . z_3) = (z_1 .z_2) . z_3.$$

c) Phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng:

$$(z_1 + z_2) .z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Nếu z_1 và z_2 là các số thực thì định nghĩa tích giống như số thực. Khi $z_1 = z_2 = i$ thì ta có: $z_1 z_2 = i . i = i^2 = -1$.

Rõ ràng, tích của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ được thực hiện theo qui tắc nhân bình thường trong đại số, trong đó $i^2 = -1$.

Đặc biệt: $z.\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ là một số thực không âm.

3. Phép chia: Thương của hai số phức z_1 và z_2 ($z_2 \neq 0$) là một số phức, sao cho:

$$z = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2} = \frac{x_1 z_2 + y_1 + y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i.\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Rõ ràng phép chia hai số phức được thực hiện nhờ nhân cho tử số và mẫu số cho $\overline{z_2}$ và sau đó thực hiện phép nhân bình thường với $i^2 = - 1$.

1.1.3. Mặt phẳng phức: Xét mặt phẳng với hệ trục tọa độ để các vuông góc xoy.

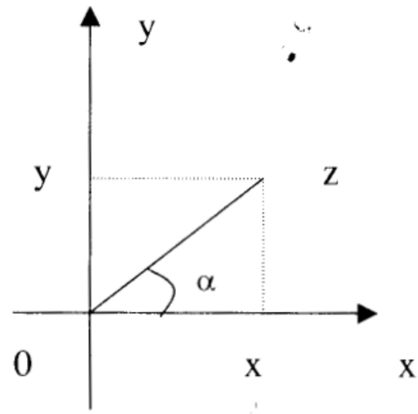
Với mỗi điểm $M(x_1y)$ tương ứng với một số phức duy nhất $z = x + i.y$, trong đó phần thực x và y tương ứng với hoành độ và tung độ của điểm $M(x_1y)$. Ngược lại, ứng với mỗi số phức $z = x + i.y$) ta cũng chỉ có một điểm trên mặt phẳng xoy là $M(x_1 y)$, trong đó hoành độ tung độ ứng với phần thực và phần ảo của số phức z.

Như vậy tập hợp các điểm $\{M(x,y)\}$ trên mặt phẳng xoy có sự tương ứng đơn trị hai chiều với tập hợp các số phức$\{z\}$. Mặt phẳng (z) được biểu diễn tương ứng với tập các số phức như thế ta gọi là mặt phẳng phức, và trục ox được gọi là trục thực, còn trục oy được gọi là trục ảo của mặt phẳng phức.

1.2. Dạng lượng giác của số phức:

Ngoài dạng nhị thức của số phức z, trong nhiều trường hợp người ta thường sử dụng dạng lượng giác.

Nếu nhận trục ox làm trục cực, góc tọa độ làm gốc cực và r là bán kính cực, φ là góc cực của điểm z thì ta có: $z = x + i.y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Hình 1.1

Bán kính cực r được gọi là mô đun của số phức z và được kí hiệu: |Z|, góc φ - được gọi là argumen và được kí hiệu: Argz.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Argz} = \begin{cases} \text{asctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi \ \text{(goc I va IV)} \\ \text{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi \ \text{(goc II va III)} \end{cases}$$

trong đó arctg là giá trị chính của Artg và $\text{tg}\left(\text{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$ Từ đó ta có: $\text{argz} = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$ nếu $x > 0$

$$\text{argz} = -\pi + \text{artg}\frac{y}{x} \text{ nếu } x < 0, y < 0.$$

Ngoài ra, từ định nghĩa argz ta có:

$$\text{argz} = \frac{\pi}{2} \text{ nếu } x = 0, y > 0$$

$$\text{argz} = -\frac{\pi}{2} \text{ nếu } x = 0, y < 0$$

Chú ý rằng, nhánh chính của argz bị gián đoạn trên nửa trục âm; khi z tiến gần đến nửa trục âm ở phía trên argz tiến đến + π, và khi z tiến đến phía dưới nửa trục âm thì arg z tiến đến - π. Tại những điểm còn lại của mặt phẳng phức (trừ z = 0) hàm này liên tục.

Từ định nghĩa các hàm Argz và argz, ta có:

$$\text{A rgz} = \arg z + 2k\pi, k \in Z$$

Từ điều kiện bằng nhau của hai số phức z_1 và z_2 cho trong giai đoạn độ cực, ta có:

$$|z_1| = |z_2|, \ \arg z_1 = \arg z_2$$

$$\text{Arg}z_1 = \text{Arg}z_2 + 2k\pi$$

Và: $$|\bar{z}| = |z|\ , \arg\bar{z} = -\arg z(\arg z \neq \pi)$$

Để tính toán đối với số phức được thuận lợi, sau đây chúng ta xét các phép tính nhân, chia, lũy thừa, khai căn và lôgarit của số phức theo argumen và mô đun:

1) Phép nhân: Tích của hai số phức:

$$Z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

được xác định như sau:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

như vậy, $|z| = |z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2| = r_1 . r_2$

$$\text{A rgz} = \text{A rg}(z_1 z_2) = \text{A rgz}_1 + \text{A rgz}_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Trong đó φ_1, φ_2 và $\varphi_1 + \varphi_2 \in (-\pi, \pi)$

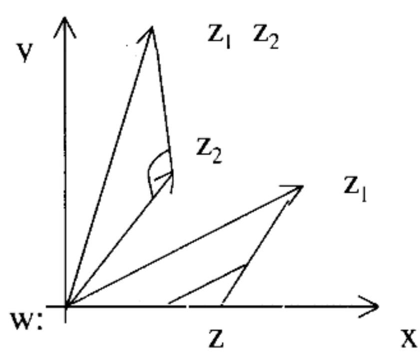
Có thể biểu diễn trên hình học tích của hai số phức z_1 và z_2 (h.1.2)

Từ định nghĩa đó ta có thể mở rộng cho tích các số phức:

$$Z = z_1 \ldots z_n.$$

Đặc biệt tích của n số phức z là một số phức w:

$$w = z . z \ldots z = z^n$$



Hình 1.2

Nếu z = r (cosφ + isinφ)

Ví dụ 1: Khi z = i ta có: $i^2 = i . i = -1$

$$i^3 = i^2 . i = -i , i^4 = i^3 . i = 1,.....,$$

$$i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -i, i^{4k+3} = -i. K \in z.$$

Ví dụ 2: Khi $z = \cos\varphi + i \sin \varphi$ thì ta có công thức

Moavrơ: $(\cos\varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

2) Phép chia: Thương của hai số phức $z_1 = r_1 (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ và số phức $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ được xác định như sau:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Như vậy: $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$A\,rg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

3) Phép khai căn: Căn bậc n (n nguyên dương) của số phức z là một số phức w sao cho : $w^n = z$, kí hiệu: $w = \sqrt[n]{z}$

Nếu đặt $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

Thì ta có: $\rho^n (\cos + i \sin) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ta có:

$$\rho^n = r, \ n\theta = \varphi + 2k\Pi, k \in z$$

hay là: $$\rho = \sqrt[n]{r} \ , \ \theta = \frac{\varphi + 2k\Pi}{n}, k = 0,1,2, ..., n - 1$$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của số phức $w = \sqrt[4]{1+i}$

Lời giải: $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ từ đó ta có:

$$w = \sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$